Resumen de conceptos y técnicas del cálculo diferencial de funciones de varias variables

Te propongo que repasemos los conceptos y las técnicas de cálculo diferencial para funciones de varias variables. Lee con atención lo que sigue y no dejes de hacer los ejercicios propuestos, pues los que tengas que hacer en el examen serán muy parecidos a ellos.

Cálculo de derivadas parciales

Como para calcular derivadas parciales de una función de varias variables se consideran fijas todas las variables menos aquella respecto a la que se deriva, calcular derivadas parciales es lo mismo que derivar funciones de una variable. Solamente debes tener cuidado para darte cuenta qué tipo de función es la que tienes que derivar porque ello puede depender de la variable respecto de la que derivas. Por ejemplo, la función $f(x,y) = x^y$ cuando fijas y (para derivar respecto a x) es una función potencia (la variable está en la base y el exponente está fijo) y cuando fijas x (para derivar respecto a y) es una función exponencial (la variable está en el exponente y la base está fija).

Te recuerdo que es muy frecuente, sobre todo en libros de Física e ingenierías diversas, representar las funciones por letras. Así, lo que los matemáticos solemos escribir $f(x,y) = \cos(xy) + xy^2$, para indicar que f es una función de dos variables x e y cuyo valor en el punto (x,y) viene dado por $\cos(xy) + xy^2$, suele expresarse de forma menos precisa en la forma $z = \cos(xy) + xy^2$, cuyo significado es exactamente el mismo que el anterior cambiando f por z. Naturalmente, en vez de z puede usarse cualquier otro símbolo que sea distinto de x e y. Tienes que acostumbrarte a esta notación y entender cuándo una letra representa una variable y cuándo representa una función.

1. Calcula las derivadas parciales de primer orden de los campos escalares:

(a) $f(x,y) = x^2y + z^2x + y\operatorname{sen}(xz)$ (b) $z = (x^2 + y^3)\,\mathrm{e}^{-xy}$ (c) $w = x\,\mathrm{e}^z + z\,\mathrm{e}^y + xyz$.

2. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{1+y^2+z^2}$.

3. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden de los campos escalares:

(a) $z = \operatorname{sen}\left(\cos\left(\mathrm{e}^{xy}\right)\right)$ (b) $w = \log\left(4 + \operatorname{arc\,tg}(x/y)\right)$ (c) $u = \operatorname{tg}\left((xy)^z\right)$ (d) $v = \operatorname{arc\,tg}\left(z^{xy}\right)$

Derivada de un campo escalar en un punto según una dirección dada

Si f es un campo escalar con derivadas parciales continuas, la derivada de f en un punto a en la dirección dada por el vector u viene dada por el producto escalar $\left(\nabla f(a) \,\middle|\, u\right)$, donde $\nabla f(a)$ es el vector gradiente de f calculado en el punto a. Supuesto que $\nabla f(a) \neq 0$, la dirección en la cual la derivada direccional de f en a es máxima, que indica la dirección en la cual el campo en a crece más rápidamente, viene dada por el vector $u = \dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ (donde, como siempre, $\|.\|$ indica la norma euclídea) y su valor es igual a $\|\nabla f(a)\|$.

Análogamente, la dirección en la cual la derivada direccional de f en a es mínima, que indica la dirección en la cual el campo en a decrece más rápidamente, viene dada por el vector $v = -\dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ y su valor es igual a $-\|\nabla f(a)\|$.

Te recuerdo que una dirección viene dada por un vector de norma euclídea 1. Si a y b son puntos de $\mathbb{R}^n$ la dirección del punto a hacia el punto b viene dada por el vector $\dfrac{b-a}{\|b-a\|}$.

4. Calcula la derivada direccional de $f(x,y) = \log(1+\sqrt{x^2+y^2})$ en el punto $(1,2)$ en la dirección hacia el origen.

5. Calcula la derivada direccional de $z(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ en el punto $(1,1)$ en la dirección hacia el punto $(2,1)$.

6. Calcula valores de a, b y c para que la derivada direccional de la función

$$f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$$

en el punto $(1,2,-1)$ tenga un valor máximo igual a 64 en la dirección del eje OZ.

Cálculo de derivadas parciales de una función compuesta

Consideremos una función de dos variables x e y, $z = z(x,y)$, y supongamos que expresamos x e y en función de nuevas variables u y v, lo que indicamos en la forma $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. De esta forma la función z es función (función compuesta) de las "variables libres" u y v, a través de las "variables dependientes" x e y. Se trata de calcular las derivadas parciales de z respecto de las nuevas variables u y v. La regla para hacerlo es la siguiente: para derivar una función

$$z = z(x,y), \quad x = x(u,v),\ y = y(u,v)$$

respecto de una nueva variable, se deriva z respecto de cada una de las antiguas variables y se multiplica por la derivada de cada antigua variable respecto de la nueva variable. Se entiende mejor si lo escribimos simbólicamente

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

En esta igualdad debes darte cuenta de que a la izquierda, como estamos derivando respecto a u, la letra z representa a la función compuesta $z = z(x(u,v), y(u,v))$ y la derivada está calculada en un punto (u,v). En la parte derecha de la igualdad la letra z representa la función dada $z = z(x,y)$ y las letras x e y representan variables (cuando se deriva respecto de ellas) y funciones (cuando se derivan respecto de u). Debe entenderse que cuando se sustituye un valor de (u,v) en la igualdad los valores de x e y deben sustituirse por $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$.

7. Sea $z = \cos(xy) + e^{y-1}\cos x$ donde $x = u^2 + v$, $y = u - v^2$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ en el punto $(u,v) = (1,1)$.

8. Sea $u = (x+y)^4 + y^2(z+x)^3$ donde $x = rs\,e^{-t}$, $y = rs\log(1+t^2)$, $z = r^2 s\cos t$. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

9. Sea $z = f(x,y)$, y pongamos $x = u^2 + v^2$, $y = u/v$. Calcular las derivadas parciales de de z respecto de las nuevas variables u y v en función de las derivadas parciales de z respecto de x e y.

10. Sea $u = x^4y + y^2z^3 + \varphi(x/y)$, donde

$$\begin{cases} x = 1 + rs\,e^{t} \\ y = rs^2\,e^{-t} \\ z = r^2 s \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$, sabiendo que $\varphi'(3/2) = -1$.

11. Sea $z = f(x,y)$ donde $x = s^4 + r^4$, $y = 2rs^2$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,2)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2,2)$ Sabiendo que $\dfrac{\partial z}{\partial r}(1,1) = -2$ y $\dfrac{\partial z}{\partial s}(1,1) = 3$.

12. Prueba que la función $F(x,y) = f(\frac{y}{x^2-y^2})$, donde f es una función real derivable, verifica la igualdad

$$(x^2+y^2)\frac{\partial F}{\partial x} + 2xy\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

13. Prueba que la función $F(u,v) = f(uv,(u^2-v^2)/2)$, donde $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, verifica la igualdad

$$(u^2+v^2)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2$$

14. Sea $g(s,t) = f(s^2-t^2, t^2-s^2)$. Prueba la igualdad $t\dfrac{\partial g}{\partial s} + s\dfrac{\partial g}{\partial t} = 0$.

15. Sean las funciones $f(x,y,z) = (\mathrm{e}^x + y^2, \lambda\mathrm{e}^z + y)$ (donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro), $g(u,v) = v^2 + \log u$ para $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. ¿Qué valor debe tener λ para que la derivada direccional máxima de $g \circ f$ en $(0,0,0)$ sea igual a 1?

Cálculo de rectas tangentes y normales a curvas y de planos tangentes a superficies

Te recuerdo que en la práctica dedicada a representaciones gráficas en 3D hay una sección dedicada a la interpretación geométrica de las derivadas parciales.

Una curva Γ en el plano puede venir dada de tres formas:

a) Como la gráfica de una función $y = f(x)$ donde $x \in I$ siendo I un intervalo de $\mathbb{R}$.

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\}$$

b) De forma implícita como el conjunto de puntos $g(x,y) = 0$ donde se anula una función diferenciable de dos variables.

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}$$

c) Por medio de ecuaciones paramétricas $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$$

Observa que **a)** es un caso particular de **b)** (basta considerar $g(x,y) = f(x) - y$) y también es un caso particular de **c)** (basta considerar $\gamma(x) = (x, f(x))$). La tangente en un punto de Γ viene dada en cada caso como sigue.

a′) La tangente en un punto $(a,b) = (a, f(a)) \in \Gamma$ es la recta de ecuación cartesiana $y - b = f'(a)(x-a)$. El vector $(1, f'(a))$ es tangente a Γ en el punto (a,b) y el vector $(f'(a), -1)$ es ortogonal a Γ en el punto (a,b).

b′) La tangente en un punto $(a,b)\in\Gamma$ es la recta de ecuación implícita

$$\big(\nabla g(a,b)\,\big|\,(x-a,y-b)\big)=0$$

Se supone que $\nabla g(a,b)\neq 0$ pues en otro caso, la tangente en (a,b) no está definida. El vector gradiente $\nabla g(a,b)$ es ortogonal a Γ en el punto (a,b).

c′) La tangente en un punto $\gamma(t_0)=(a,b)\in\Gamma$ es la recta de ecuaciones paramétricas

$$(x,y)=\gamma(t_0)+t\gamma'(t_0)=(a,b)+t(x'(t_0),y'(t_0))$$

El vector $\gamma'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0))$ es tangente a Γ en (a,b).

Si $f(x,y)$ es un campo escalar de dos variables, las curvas de ecuación implícita $f(x,y)=c$ o, lo que es igual $f(x,y)-c=0$, donde c es una constante, se llaman *curvas de nivel*. De lo dicho en **b′)**, se sigue que el vector gradiente $\nabla f(x,y)$ es ortogonal en todo punto (x,y) (en el que $\nabla f(x,y)\neq 0$) a la curva de nivel que pasa por dicho punto.

16. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

en un punto (u,v) de la misma.

17. Considera la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x(t)=\mathrm{e}^t+\cos t$, $y(t)=\mathrm{e}^{-t}+\operatorname{sen} t$. Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto $(x(0),y(0))$.

18. Calcula, para los siguientes campos escalares, el vector normal en P_0 a la curva de nivel que pasa por dicho punto.

a) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$ $\qquad P_0=(1,1)$.

b) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{2+\cos(x-y)}$ $\qquad P_0=(\pi/2,\pi/4)$.

19. Calcula la derivada de $h(x,y)=\dfrac{x-y}{1+\log(1+x^2y^2)}$ en el punto $(-1,-1)$ en la dirección dada por el vector ortogonal (de norma 1) en el punto $(1,1)$ a la curva de nivel del campo $f(x,y)=xy^3+x^3y$ que pasa por dicho punto.

Una superficie S en el espacio $\mathbb{R}^3$ puede venir dada de tres formas:

a) Como la gráfica de una función $y=f(x,y)$ donde $(x,y)\in A$ siendo A un conjunto de $\mathbb{R}^2$.

$$S=\{(x,y,f(x,y)):(x,y)\in A\}$$

b) De forma implícita como el conjunto de puntos $g(x,y,z)=0$ donde se anula una función diferenciable de tres variables.

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:g(x,y,z)=0\right\}$$

c) Por medio de ecuaciones paramétricas $\gamma(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ donde $(s,t) \in A \subset \mathbb{R}^2$.

$$S = \gamma(A) = \{(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) : (s,t) \in A\}$$

Observa que **a)** es un caso particular de **b)** (basta considerar $g(x,y,z) = f(x,y) - z$) y también es un caso particular de **c)** (basta considerar $\gamma(s,t) = (s,t,f(s,t))$). El plano tangente en un punto de S viene dada en cada caso como sigue.

a′) El plano tangente en un punto $(a,b,c) = (a,b,f(a,b)) \in S$ es el plano de ecuación cartesiana

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Los vectores $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)$ y $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ son tangentes a S en (a,b,c) y el vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$$

es ortogonal a S en el punto (a,b,c).

b′) El plano tangente en un punto $(a,b,c) \in S$ es el plano de ecuación implícita

$$\big(\nabla g(a,b,c) \,\big|\, (x-a, y-b, z-c)\big) = 0$$

Se supone que $\nabla g(a,b,c) \neq 0$ pues en otro caso, el plano tangente a S en (a,b,c) no está definido. El vector gradiente $\nabla g(a,b,c)$ es ortogonal a S en el punto (a,b,c).

c′) El plano tangente en un punto $\gamma(s_0,t_0) = (a,b,c) \in S$ es el plano de ecuaciones paramétricas

$$(x,y,z) = \gamma(s_0,t_0) + s\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_0,t_0) + t\frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_0,t_0)$$

Donde

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_0,t_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}(s_0,t_0), \frac{\partial y}{\partial s}(s_0,t_0), \frac{\partial z}{\partial s}(s_0,t_0)\right)$$

es el primer vector columna de la matriz jacobiana de γ en (s_0,t_0), y

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_0,t_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}(s_0,t_0), \frac{\partial y}{\partial t}(s_0,t_0), \frac{\partial z}{\partial t}(s_0,t_0)\right)$$

es el segundo vector columna de la matriz jacobiana de γ en (s_0,t_0). Dichos vectores son tangentes a S en (a,b,c).

Si $f(x,y,z)$ es un campo escalar de tres variables, las superficies de ecuación implícita $f(x,y,z) = c$ o, lo que es igual $f(x,y,z) - c = 0$, donde c es una constante, se llaman *superficies de nivel* (cuando el campo se interpreta como un potencial se llaman superficies equipotenciales). De lo dicho en **b′)**, se sigue que el vector gradiente $\nabla f(x,y,z)$ es ortogonal en todo punto (x,y,z) (en el que $\nabla f(x,y,z) \neq 0$) a la superficie de nivel que pasa por dicho punto.

Una curva Γ en el espacio puede venir dada de dos formas.

a) Como intersección de dos superficies S_1 y S_2.

b) Por medio de ecuaciones paramétricas $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ donde $t \in I \subset \mathbb{R}$ e I es un intervalo.

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in I\}$$

La tangente en un punto de Γ viene dada en cada caso como sigue.

a′) La tangente en un punto $(a,b,c) \in \Gamma$ es la recta intersección de los planos tangentes a S_1 y a S_2 en (a,b,c). Por ejemplo, si las superficies vienen dadas por sus ecuaciones implícitas.

$$\begin{cases} S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\} \\ S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\} \end{cases} \qquad \Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = f(x,y,z) = 0\}$$

Entonces, las ecuaciones implícitas de la recta tangente son

$$\begin{cases} \big(\nabla f(a,b,c) \,\big|\, (x-a, y-b, z-c)\big) = 0 \\ \big(\nabla g(a,b,c) \,\big|\, (x-a, y-b, z-c)\big) = 0 \end{cases}$$

Donde se supone que los vectores gradiente $\nabla f(a,b,c)$, $\nabla g(a,b,c)$ son linealmente independientes pues, en otro caso, la recta tangente a la curva Γ en (a,b,c) no está definida.

b′) La tangente en un punto $\gamma(t_0) = (a,b,c) \in \Gamma$ es la recta de ecuaciones paramétricas

$$(x,y,z) = \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) = (a,b,c) + t(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

El vector $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ es tangente a Γ en (a,b,c).

20. Calcula las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes superficies en el punto P_o indicado.

$$\begin{aligned} z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0, &\quad P_o(1,-1,4); & z - \log(x^2+y^2) = 0, &\quad P_o(1,0,0) \\ x^2+y^2+z^3-2x+4y+3z+1 = 0, &\quad P_o(3,4,-3); & 4 - x^2 - 4z^2 = y, &\quad P_o(0,0,1) \\ z(xy-1)-(x+y) = 0, &\quad P_o(1,2,3); & z + \mathrm{e}^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0, &\quad P_o(1, 1+\sqrt{e}, 1) \end{aligned}$$

21. Halla la ecuación de la tangente a la curva dada como intersección del elipsoide $x^2+4y^2+2z^2 = 27$ y el hiperboloide $x^2+y^2-2z^2 = 11$ en el punto $(3,-2,1)$.

22. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la intersección de las superficies $z = xy$, $x^2+y^2-2z = 4$ en el punto $(3,1,3)$. Comprueba el resultado expresando la curva por sus ecuaciones paramétricas.

23. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la intersección de las superficies $4xz = (x+z)y$, $3z^2+y = 5x$ en el punto $(1,2,1)$.

Extremos relativos

Supongo que conoces la teoría de extremos relativos para campos escalares definidos en un conjunto abierto. Debes conocer condiciones necesarias y condiciones suficientes para que un campo escalar de dos o tres variables con derivadas parciales de segundo orden continuas en un conjunto abierto tenga un extremo relativo en un punto de dicho conjunto. La teoría es clara y sencilla, lo que ya no es tan sencillo es calcular los puntos críticos de un campo escalar porque para eso no hay reglas (ni puede haberlas). En la práctica dedicada a representaciones gráficas en 3D tienes un programa que calcula (cuando puede) los puntos críticos de un campo escalar de dos variables y los clasifica (esta es la parte sencilla) según sean máximos o mínimos relativos, puntos de silla o un caso dudoso en el que los criterios de clasificación no proporcionan información concluyente. Para tu comodidad te recuerdo aquí la teoría que ya debes conocer.

Condiciones necesarias y condiciones suficientes de extremo relativo

Sea $A\subset\mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea f un campo escalar definido en A que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas.
a) Para que un punto $(a,b)\in A$ sea un extremo relativo de f es necesario que dicho punto sea un punto crítico de f, es decir $\nabla f(a,b)=0$. Equivalentemente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

b) Supongamos que $(a,b)\in A$ es un punto crítico de f y sea

$$Hf(a,b)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

la matriz hessiana de f en (a,b) y notemos $\det Hf(a,b)$ su determinante.

- Si $\det Hf(a,b)>0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$ entonces f tiene en (a,b) un mínimo relativo.
- Si $\det Hf(a,b)>0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$ entonces f tiene en (a,b) un máximo relativo.
- Si $\det Hf(a,b)<0$ entonces f no tiene extremo relativo en (a,b). Se dice que (a,b) es un punto de silla de f.
- Cuando $\det Hf(a,b)=0$ el conocimiento de la matriz hessiana no permite decidir si hay o no hay extremo relativo en (a,b). Cuando esto sucede puede ser interesante estudiar el comportamiento de las curvas $f(a,t+b)$ y $f(a+t,b)$. Si alguna de dichas curvas no tiene extremo relativo o tienen extremos relativos de distinta naturaleza en $t=0$, podemos concluir que en (a,b) no hay extremo relativo de f.

23. Determinar los extremos relativos de las funciones:

$$f(x,y)=2x^3+6xy^2-3x^2+3y^2; \qquad f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5; \qquad f(x,y)=\frac{x^2y^2-8x+y}{xy}$$

$$f(x,y)=2x^2+y^2+8x-6y+20; \qquad f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1; \qquad f(x,y)=\cos(x)\cos(y)$$

$$f(x,y)=2x+y+x^2+xy+y^3; \qquad f(x,y)=x^2y^2-x^2-y^2; \qquad f(x,y)=x\log y-x$$

$$f(x,y)=2x^4+y^4-4x^2-2y^2; \qquad f(x,y)=xy(1-x-y); \qquad f(x,y)=-4x^3+6x^2y+3y^4-4y^3$$

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2+yz+2xz-xy; \quad f(x,y,z)=(x^2+z^2)\,\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}; \quad f(x,y,z)=xy+xz+yz$$

24. Trazar un plano que pase por el punto $(1,2,3)$ y que forme con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo (el volumen del tetraedro es un tercio del área de la base por la altura).

Extremos condicionados

En la teoría de extremos relativos se supone que las variables pueden tomar valores en cualquier punto de un conjunto abierto, es decir, pueden "moverse libremente" en dicho conjunto. En muchos, por no decir que en la mayoría, de los problemas reales las variables no tienen tanta libertad y están obligadas a satisfacer ciertas condiciones que en Física suelen llamarse "ligaduras". Por ejemplo, supongamos que un móvil se mueve en una curva Γ dada por la intersección de dos superficies; para cada punto $(x,y,z)\in\Gamma$ la energía cinética del móvil viene dada por una función conocida $f(x,y,z)$ y queremos calcular los puntos de la trayectoria donde dicha energía es máxima o mínima. En esta situación las variables x,y,z no son libres sino que deben satisfacer la condición $(x,y,z)\in\Gamma$. Otro ejemplo; supongamos que la temperatura en un punto (x,y,z) de la superficie terrestre viene dada por una función $T(x,y,z)$ y queremos calcular los puntos de mayor y menor temperatura. Aquí las variables tampoco son libres pues deben verificar una condición de la forma $x^2+y^2+z^2=R^2$ donde R es el radio de la Tierra. Igualmente, en problemas de optimización de costes o beneficios las variables están siempre sometidas a restricciones que dependen de las condiciones de producción o del mercado.

Es importante que comprendas la diferencia entre un problema de extremos relativos "libres" y un problema de extremos condicionados. Considera el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

La función $f(x,y)=xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ tiene un único punto crítico, el origen, que es un punto de silla. Por tanto dicha función no tiene extremos relativos en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que imponemos a las variables la condición $x^2+y^2=1$ y queremos calcular el máximo valor de $f(x,y)$ cuando se verifique que $x^2+y^2=1$. Fíjate en que el problema es completamente distinto. Ahora solamente nos interesan los valores que toma la función $f(x,y)$ en el conjunto

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$$

Sabemos que dicho conjunto es un conjunto compacto (es cerrado – porque coincide con su frontera – y acotado); además la función f es continua, por tanto podemos asegurar, de entrada, que tiene que haber algún punto $(a,b)\in K$ en el cual la función f alcanza su mayor valor en K (y tiene que haber otro donde alcance su menor valor en K). Calcular dicho punto es, en este caso, muy sencillo pues para $(x,y)\in K$ se tiene que $f(x,y)=\mathrm{e}xy$. Como para $(x,y)\in K$ se tiene que $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ y los valores negativos de f no nos interesan porque queremos calcular el mayor valor que toma en K, se sigue que

$$\text{máx}\,\{f(x,y):(x,y)\in K\}=\text{máx}\left\{\mathrm{e}x\sqrt{1-x^2} : -1\leqslant x\leqslant 1\right\}$$

(Alternativamente, podemos usar la desigualdad, antigua conocida nuestra, $xy\leqslant(x^2+y^2)/2$ y la igualdad se da si, y sólo si, $x=y$). Nuestro problema se ha convertido en calcular el máximo absoluto de la función $h(x)=\mathrm{e}x\sqrt{1-x^2}$ para $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Ejemplo 2

De hecho, tú has resuelto ejercicios de extremos condicionados aunque no seas consciente de ello. Por ejemplo, seguro que alguna vez has resuelto el siguiente ejercicio.
Entre todos los rectángulos cuyo perímetro es igual a 16 calcular el que tiene área máxima.

Este ejercicio puedes plantearlo como sigue. Sea $f(x,y)=xy$ la función que da el área de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes x e y. Se trata de calcular el máximo de $f(x,y)$ cuando las variables verifican la condición $2x+2y=16$. Por tanto, es un problema de extremos condicionados. Seguro que ahora recuerdas algunos otros ejercicios parecidos a este que has hecho sin saber que estabas haciendo problemas de extremos condicionados. La razón es clara: la condición que nos dan es tan sencilla que permite despejar una variable en función de la otra, $y=8-x$, con lo que nuestra función se convierte en $xy=x(8-x)$ y el problema queda reducido a calcular el mayor valor de $x(8-x)$ cuando $-8\leqslant x\leqslant 8$.

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que los problemas de extremos condicionados en los que puede utilizarse la condición que nos dan para despejar una variable en función de otra, se reducen fácilmente a problemas de extremos de funciones de una variable. Pero supongamos ahora que cambiamos la condición del ejemplo 1 por la siguiente:

$$x-\mathrm{e}^x+y+\mathrm{e}^y+\sin(1+xy)=2$$

La cosa se complica porque ahora es imposible usar la condición impuesta para despejar una variable en función de la otra. Ahora sí tenemos un auténtico problema de extremos condicionados.

Lo antes dicho para funciones de dos variables puedes generalizarlo para funciones de tres variables. Por ejemplo el problema de calcular las dimensiones de un ortoedro de volumen igual a 8 para que su superficie lateral sea mínima, puedes plantearlo como sigue: calcular el máximo de

$$f(x,y,z)=2xy+2xz+2yz$$

(la función que da la superficie lateral de un ortoedro cuyos lados tiene longitudes x, y, z) con la condición $xyz=8$. Se trata de un problema de extremos condicionados, pero la condición dada permite despejar una variable en función de las otras dos $z=8/(xy)$ con lo que nuestra función queda $2xy+2xz+2yz=xy+16/y+16/x$ función de la que hay que calcular su mínimo absoluto cuando $0<x$, $0<y$. Hemos convertido así el problema en uno de extremos relativos de una función de dos variables. Pero si cambiamos la condición anterior por la siguiente

$$x^2yz^3+\operatorname{sen}(1+xz)+y-\mathrm{e}^{yx}=1$$

o bien, si imponemos dos condiciones como las siguientes:

$$\log(1+x^2+y^2)+\sin(1+xz)-1=0,\qquad \mathrm{e}^{1+y+x+z}+\cos(xyz)+x^2z^2-3=0$$

entonces no podemos usar esa condición (o condiciones) para despejar una variable (o dos variables) en función de las otras (de la otra).

La teoría de extremos condicionados te dice cómo proceder en este tipo de problemas independientemente de que la condición (o condiciones) que nos den sea más o menos fácil y permita o no despejar variables. El resultado básico de esa teoría, que proporciona una ***condición necesaria*** de extremo condicionado, es el teorema de Lagrange. Para facilitar su comprensión, en vez de dar un enunciado general, lo enuncio en los tres casos que se presentan con mayor frecuencia. Antes de enunciarlo conviene dar la definición de extremo local condicionado.

Sea f un campo escalar de n variables y S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un máximo (resp. mínimo) local condicionado (por la condición $x\in S$) en un punto $a\in S$, si hay un número $r>0$ tal que para todo $x\in B(x,r)\cap S$ se verifica que $f(a)\geqslant f(x)$ (resp. $f(a)\leqslant g(x)$). Cuando f tiene en a un máximo o un mínimo local condicionado (por la condición $x\in S$) se dice que f tiene un extremo condicionado en a.

Teorema de Lagrange

En lo que sigue supondremos que las funciones que intervienen tienen derivadas parciales de primer orden continuas.

a) Consideremos el problema de calcular los extremos locales una función de dos variables $f(x,y)$ cuando las variables están obligadas a moverse en una curva Γ dada por $g(x,y)=0$:

$$\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\right\}$$

Es decir, se trata de un problema de extremos condicionados por la condición $(x,y)\in\Gamma$ o, equivalentemente, $g(x,y)=0$.

Además de las condiciones de derivabilidad que se han supuesto al principio, hay que suponer que el vector gradiente de g no se anula en los puntos de Γ. En estas hipótesis, para que un punto $(a,b)\in\Gamma$ sea un extremo local condicionado de f, es necesario que los vectores gradiente de f y de g en el punto (a,b) sean linealmente dependientes; es decir, que exista un número real λ_0 tal que

$$\nabla f(a,b)+\lambda_0\nabla g(a,b)=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)+\lambda_0\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\lambda_0\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0 \end{array}\right.$$

Como debe cumplirse también que $g(a,b)=0$, para recordar estas tres condiciones que debe cumplir el punto (a,b) se suele definir una nueva función de tres variables, llamada función de Lagrange, por

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

y las condiciones anteriores nos dicen que el punto (a,b,λ_0) es un punto crítico de la función de Lagrange, es decir, es solución del sistema de ecuaciones (llamado sistema de Lagrange):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=g(x,y)=0 \end{array}\right.$$

b) Consideremos el problema de calcular los extremos locales una función de tres variables $f(x,y,z)$ cuando las variables están obligadas a moverse en una superficie S dada por $g(x,y,z)=0$:

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : g(x,y,z)=0\right\}$$

Es decir, se trata de un problema de extremos condicionados por la condición $(x,y,z)\in S$ o, equivalentemente, $g(x,y,z)=0$.

Además de las condiciones de derivabilidad que se han supuesto al principio, hay que suponer que el vector gradiente de g no se anula en los puntos de S. En estas hipótesis, para que un punto $(a,b,c)\in S$ sea un extremo local condicionado de f, es necesario que los vectores gradiente de f y de g en el punto

(a,b,c) sean linealmente dependientes; es decir, que exista un número real λ_0 tal que

$$\nabla f(a,b,c)+\lambda_0\nabla g(a,b,c)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+\lambda_0\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b,c)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)+\lambda_0\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b,c)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)+\lambda_0\dfrac{\partial g}{\partial z}(a,b,c)=0 \end{cases}$$

Como debe cumplirse también que $g(a,b,c)=0$, para recordar estas cuatro condiciones que debe cumplir el punto (a,b,c) se suele definir una nueva función de cuatro variables, llamada función de Lagrange, por

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

y las condiciones anteriores nos dicen que el punto (a,b,c,λ_0) es un punto crítico de la función de Lagrange, es decir, es solución del sistema de ecuaciones (llamado sistema de Lagrange):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda)=g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

c) Consideremos el problema de calcular los extremos locales una función de tres variables $f(x,y,z)$ cuando las variables están obligadas a moverse en una curva Γ dada por $g(x,y,z)=h(x,y,z)=0$:

$$\Gamma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : g(x,y,z)=h(x,y,z)=0\right\}$$

Es decir, se trata de un problema de extremos condicionados por la condición $(x,y,z)\in\Gamma$ o, equivalentemente, $g(x,y,z)=h(x,y,z)=0$.

Además de las condiciones de derivabilidad que se han supuesto al principio, hay que suponer que los vectores gradiente de g y de h son linealmente independientes en todo punto de Γ. En estas hipótesis, para que un punto $(a,b,c)\in\Gamma$ sea un extremo local condicionado de f, es necesario que los vectores gradiente de f, g y h en el punto (a,b,c) sean linealmente dependientes; es decir, que existan números reales λ_0,μ_0 tales que

$$\nabla f(a,b,c)+\lambda_0\nabla g(a,b,c)+\mu_0\nabla h(a,b,c)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+\lambda_0\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b,c)+\mu_0\dfrac{\partial h}{\partial x}(a,b,c)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)+\lambda_0\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b,c)+\mu_0\dfrac{\partial h}{\partial y}(a,b,c)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)+\lambda_0\dfrac{\partial g}{\partial z}(a,b,c)+\mu_0\dfrac{\partial h}{\partial z}(a,b,c)=0 \end{cases}$$

Como debe cumplirse también que $g(a,b,c)=h(a,b,c)=0$, para recordar estas cinco condiciones que debe cumplir el punto (a,b,c) se suele definir una nueva función de cinco variables, llamada función de Lagrange, por

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$$

y las condiciones anteriores nos dicen que el punto (a,b,c,λ_0,μ_0) es un punto crítico de la función de Lagrange, es decir, es solución del sistema de ecuaciones (llamado sistema de Lagrange):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda,\mu) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) + \mu\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda,\mu) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + \mu\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda,\mu) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) + \lambda\dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) + \mu\dfrac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda,\mu) = g(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu}(x,y,z,\lambda,\mu) = h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Esta es la teoría que debes saber referente a extremos condicionados. El método que hemos descrito se conoce como ***método de los multiplicadores de Lagrange*** porque las variables λ, μ que se introducen se llaman multiplicadores de Lagrange. No vamos a estudiar ***condiciones suficientes*** para que un punto crítico de la función de Lagrange sea realmente un extremo condicionado.

La situación que consideraremos en los ejercicios será la siguiente: deberás calcular el máximo o el mínimo absolutos de los valores de una función cuando las variables están sometidas a una condición como las que hemos considerado anteriormente (las variables deben estar en una curva Γ en el plano, o en una superficie S en el espacio, o en una curva Γ dada como intersección de dos superficies) donde, **además la curva Γ o la superficie S, según sea el caso, son conjuntos compactos** (lo que deberás justificar en cada caso). En esta situación, el teorema de Weierstrass asegura que hay puntos de Γ o S en los que la función alcanza un máximo y un mínimo absolutos, es decir, son puntos en los que la función toma el mayor valor o el menor valor de todos los valores que toma en Γ o S. Para calcular dichos puntos lo único que debes hacer es calcular los puntos críticos de la función de Lagrange y calcular el valor de la función en cada uno de ellos, aquél punto (o puntos, puede haber más de uno) donde la función tome el mayor valor será el punto donde se alcanza el máximo absoluto; aquél punto (o puntos, puede haber más de uno) donde la función tome el menor valor será el punto donde se alcanza el mínimo absoluto.

En la práctica dedicada a representaciones gráficas 3D tienes un par de ejemplos de ejercicios de extremos condicionados.

25. Calcular el valor mayor y el valor menor que toma la función $f(x,y,z) = xyz$ en los puntos del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 3$.

26. Calcular el valor mayor y el valor menor que toma la función $f(x,y,z) = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$ en los puntos del elipsoide $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$.

27. Determinar los puntos sobre la curva $x^2y = 2$ más próximos al origen.

28. Hallar el punto de la recta intersección de los planos $x - y = 2$ y $x - 2z = 4$, que está más próximo al origen.

29. Calcular el punto $P(x,y,z)$ en el plano de ecuación $2x + y - z = 5$ que está más cerca del origen.

30. El plano $x+y+z=24$ corta al paraboloide $z=x^2+y^2$ en una elipse. Calcula los puntos más altos y más bajos de dicha elipse.

31. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular un punto de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

tal que el segmento determinado por la intersección de la tangente a la elipse en dicho punto con los ejes coordenados tenga longitud mínima.

32. Dado el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

calcular un punto de coordenadas positivas tal que el plano tangente al elipsoide en dicho punto determine con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo.

33. Hallar los puntos de la curva

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2-z^2=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

que están más próximos al origen de coordenadas.

34. Calcular la mínima distancia del origen a la superficie de ecuación $xy^2z^3=2$.

35. Calcular los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z)=xyz$ cuando el punto (x,y,z) pertenece a la curva definida por la intersección del plano $x+y+z=0$ y la esfera $x^2+y^2+z^2-1=0$.

36. Calcular la mínima distancia entre la recta $x+y=4$ y la circunferencia $x^2+y^2=1$.

37. Calcular la mínima distancia entre la recta $x-y=2$ y la parábola $y=x^2$.

38. El área de una caja rectangular sin tapa es de 108cm^2. Calcular sus dimensiones para que el volumen sea máximo.

Cálculo de extremos en conjuntos compactos

En este tipo de ejercicios se trata de calcular el máximo o el mínimo absolutos de una función f con derivadas parciales continuas en un conjunto compacto K formado por la unión de un conjunto abierto acotado y de su frontera, $K=U\cup Fr(U)$. En este tipo de ejercicios la existencia de dichos extremos está asegurada de antemano en virtud del teorema de Weierstrass. Se trata realmente de dos problemas, pues lo que hay que hacer es estudiar los extremos relativos de f en el abierto U (un problema de extremos relativos) y estudiar los extremos locales condicionados de f en $Fr(U)$. Si la frontera de U está definida de forma apropiada (es una curva o una superficie) éste último es un problema de extremos condicionados. Cuando la frontera de U está dada por condiciones sencillas que permiten despejar variables puede hacerse un estudio directo sin necesidad de recurrir a la teoría de extremos condicionados.

39. Calcular los extremos absolutos de $f(x,y)=(x^2+2y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ en el disco $x^2+y^2\leqslant 4$.

40. Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x,y,z)=xy^2z^3$ en la bola $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

41. Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ en el círculo $x^2 - 2x + y^2 - 3 \leqslant 0$.

42. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2y^3(1-x-y)$ en el conjunto

$$K = \{(x,y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$$

43. Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ en el conjunto

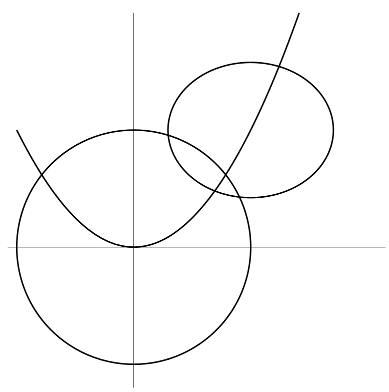
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 3\right\}$$

Derivación de funciones implícitamente definidas

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables con derivadas parciales de primer orden continuas y consideremos la ecuación $f(x,y) = 0$. Las soluciones de dicha ecuación representan una curva en el plano. Bueno, hablando con propiedad pueden representar algo más general que una curva. Para que te convenzas de ello basta que consideres la ecuación

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(2(x-1)^2 + 3(y-2)^2 - 1)(y - x^2) = 0$$

la función f se anula en los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, de la elipse $2(x-1)^2 + 3(y-2)^2 = 1$ y de la parábola $y = x^2$. Por tanto la ecuación $f(x,y) = 0$ representa la unión de todas esas curvas.



Ese conjunto no es exactamente una curva pero ***localmente*** se parece a una curva. La palabra "localmente" quiere decir que si fijamos un punto (a,b) tal que $f(a,b) = 0$ entonces hay una bola abierta centrada en (a,b) de radio positivo, $B((a,b),r)$ tal que el corte de dicha bola con el conjunto de puntos $V = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ es una curva, donde la palabra "curva" tiene el significado que le hemos dado en el apartado dedicado al cálculo de rectas tangentes. De hecho, no es cierto que la condición anterior se verifique para todos los puntos (a,b) tales que $f(a,b) = 0$. Dicha condición falla en los puntos donde se cortan dos de las curvas cuya unión forma V, pues es claro que en dichos puntos el conjunto V no parece localmente una curva. Pues bien, dichos puntos son justamente los puntos donde se anula el vector gradiente de f. En dichos puntos la recta tangente no está definida. Este ejemplo te ayudará a entender lo que sigue.

Volvamos al caso general de una función de dos variables $f(x,y)$ con derivadas parciales continuas de primer orden. Consideremos ahora la ecuación $f(x,y) = 0$ desde otro punto de vista. Intuitivamente, *una* ecuación es *una* condición que debe ligar a *una* de las variables, es decir, que si en la igualdad $f(x,y) = 0$

se fija un valor de x entonces el valor de y queda determinado de manera única por dicho valor de x. A veces esto es verdad como en el siguiente ejemplo. Consideremos

$$f(x,y) = y^3 + y\,e^x + \operatorname{sen} x$$

Fijado un valor de x la ecuación $f(x,y) = 0$ es un polinomio de tercer grado en y que tiene una única solución real pues su derivada respecto de y es $3y^2 + e^x$ que no se anula. Es decir, en este caso es cierto que la igualdad

$$y^3 + y\,e^x + \operatorname{sen} x = 0 \tag{1}$$

define de manera única a y como función de x, en el sentido de que fijado un valor de x, hay un único $y = \varphi(x)$ que verifica dicha igualdad, esto es, la función $\varphi(x)$ está definida por la condición:

$$\varphi(x)^3 + \varphi(x)\,e^x + \operatorname{sen} x = 0 \tag{2}$$

Se dice que la función φ **está implícitamente definida** por la igualdad (1). Puedes calcular con *Mathematica* el valor de dicha función y comprobarás que es bastante complicada. El hecho es que la mejor forma de trabajar con la función φ es la igualdad (2) que la define. Por ejemplo, si queremos calcular la derivada de φ en un punto basta con que derivemos dicha igualdad para obtener

$$3\varphi'(x)\varphi(x)^2 + \varphi'(x)\,e^x + \varphi(x)\,e^x + \cos x = 0$$

lo que permite calcular $\varphi'(x)$ en función de $\varphi(x)$.

En general, no es cierto que una igualdad de la forma $f(x,y) = 0$ permita despejar una variable en función de la otra. Para convencerte, considera el primer ejemplo que pusimos. Ni tan siquiera una igualdad tan sencilla como $x^2 + y^2 - 1 = 0$ permite despejar una variable como función de la otra pues es claro que para cada valor que fijemos de una variable (comprendido entre -1 y 1) hay *dos* posibles valores de la otra que verifican dicha igualdad.

Relacionemos ahora los dos puntos de vista que hemos considerado. Pongamos

$$\Gamma = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\right\}$$

Si la igualdad $f(x,y) = 0$ permitiera despejar y en función de x, es decir, definiera una función $y = \varphi(x)$ por la condición

$$f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$$

entonces se tendría que (llamando I al intervalo donde está definida φ)

$$\Gamma = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\right\} = \{(x,\varphi(x)) : x\in I\}$$

es decir, el conjunto Γ sería la gráfica de φ, que, como sabemos, es un tipo muy particular de curva. Pero ya hemos visto que el conjunto Γ puede ser una "curva" mucho más general que la gráfica de una función. Pero incluso en este caso, dicha "curva" es *localmente*, excepto en los puntos donde se anula el gradiente, una gráfica de una función.

Las consideraciones anteriores se pueden llevar al caso de una función de tres variables $f(x,y,z)$ considerando ahora la "superficie" definida por la ecuación $f(x,y,z) = 0$. La pregunta ahora es si fijados un valor de x y otro de y queda determinado de manera única un valor de $z = \varphi(x,y)$ que verifica dicha ecuación. En caso afirmativo tendríamos que la superficie de ecuación $f(x,y,z) = 0$ coincidiría con la gráfica de φ. Ya puedes suponer que esto no es cierto en general pues la mayoría de las "superficies" no son gráficas de funciones.

El siguiente resultado, conocido como teorema de la función implícita, nos dice lo que podemos afirmar en general en una situación como la que estamos considerando.

Teorema de la función implícita

Suponemos que las funciones que consideramos en lo que sigue tienen derivadas parciales de primer orden continuas.
a) Consideremos primero el caso de una función $f(x,y)$ de dos variables. Sea

$$\Gamma = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\right\}$$

Supongamos que $(a,b)\in\Gamma$ y se verifica que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

Entonces existe una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$, definida en un intervalo I tal que $a\in I$ y $\varphi(a) = b$, que verifica que $f(x,\varphi(x)) = 0$ para todo $x\in I$. La función φ se dice que está implícitamente definida por la ecuación $f(x,y) = 0$. Dicha función es derivable en I y su derivada se calcula derivando la igualdad $f(x,\varphi(x)) = 0$ respecto a x con lo que se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0 \Longrightarrow \varphi'(x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

Además tenemos que

$$\Gamma \cap (I\times\varphi(I)) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\right\} \cap (I\times\varphi(I)) = \{(x,\varphi(x)) : x\in I\}$$

es decir, Γ es ***localmente*** en el punto (a,b) una curva que viene dada por la gráfica de φ.

b) Consideremos ahora el caso de una función $f(x,y,z)$ de tres variables. Sea

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\right\}$$

Supongamos que $(a,b,c)\in S$ y se verifica que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$$

Entonces existe una función $\varphi : U \to \mathbb{R}$, definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(a,b)\in U$ y $\varphi(a,b) = c$, que verifica que $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$ para todo $(x,y)\in U$. La función φ se dice que está implícitamente definida por la ecuación $f(x,y,z) = 0$. Dicha función tiene derivadas parciales continuas en U y sus derivadas parciales se calculan derivando la igualdad $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$ parcialmente respecto a x e y con lo que se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}$$

Además tenemos que

$$S \cap (U \times \varphi(U)) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\right\} \cap (U \times \varphi(U)) = \{(x,y,\varphi(x,y)) : (x,y) \in U\}$$

es decir, S es ***localmente*** en el punto (a,b,c) una superficie que viene dada por la gráfica de φ.

El teorema de la función implícita es mucho más general pero nos limitaremos a los casos considerados. En las hipótesis hechas pueden admitirse variaciones. La hipótesis que hay que hacer siempre es que el vector gradiente de f no sea cero en el punto considerado. En el caso **a)** puede suponerse igualmente que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$$

y la conclusión es que x puede expresarse localmente como función de y, es decir, que hay una función $\psi : J \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo J tal que $b \in J$ y $\psi(b) = a$ que verifica que $f(\psi(y), y) = 0$ para todo $y \in J$. Lo que sigue ya lo puedes suponer.

Análogamente, en el caso **b)** puede suponerse, por ejemplo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) \neq 0$$

entonces es la variable x la que queda definida localmente de forma implícita como función de y, z. Tú mismo puedes completar el enunciado en este caso. Todo esto nos da más libertad para elegir la variable que queremos expresar como función de las otras, basta con que la derivada parcial respecto de dicha variable sea distinta de cero.

En la práctica el teorema de la función implícita se aplica en la forma que te explico en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3 Comprobar que la ecuación

$$xyz + \operatorname{sen}(z-6) - 2(x + y + x^2y^2) = 0$$

define a z como función implícita de (x,y) en un entorno de $(1,1)$, con $z(1,1) = 6$. Comprobar que $(1,1)$ es un punto crítico de la función $z = z(x,y)$.

Solución. Pongamos $f(x,y,z) = xyz + \operatorname{sen}(z-6) - 2(x+y+x^2y^2)$ que es una función con derivadas parciales continuas de todo orden. Tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial z} = xy + \cos(z-6)$, por lo que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,6) = 2 \neq 0$. Como, además, $f(1,1,6) = 0$, el teorema de la función implícita garantiza que hay una función con derivadas parciales continuas, $(x,y) \mapsto z(x,y)$, definida en un entorno, U, de $(1,1)$ tal que $z(1,1) = 6$, y

$$f(x,y,z(x,y)) = 0 \ \text{ para todo } \ (x,y) \in U.$$

Derivando esta identidad tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = yz - 2(1 + 2xy^2) + (xy + \cos(z-6))\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = xz - 2(1 + 2x^2y) + (xy + \cos(z-6))\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Donde las derivadas parciales de la función implícita $z = z(x,y)$ están calculadas en un punto $(x,y) \in U$ y las de f están calculadas en el punto $(x,y,z(x,y))$. Haciendo $x = y = 1$, $z = z(1,1) = 6$, en las igualdades anteriores, se obtiene que $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 0$, esto es, $(1,1)$ es un punto crítico de $z = z(x,y)$.

El ejemplo anterior es todavía demasiado explícito, nos dice muy claramente lo que hay que hacer. Lo más frecuente es que nos encontremos con ejercicios como el siguiente.

Ejemplo 4 Sabiendo que
$$y\cos(xz) + x^3\,\mathrm{e}^{zy} - z + 1 = 0 \tag{3}$$
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ y particularizar para el punto $(x,y) = (0,0)$.
Solución. En un ejercicio como este lo más fácil es que en la igualdad (3) sustituyas mentalmente $z = z(x,y)$ y la veas como
$$y\cos\big(x\,z(x,y)\big) + x^3\,\mathrm{e}^{z(x,y)\,y} - z(x,y) + 1 = 0 \tag{4}$$
es decir, supones que has calculado para valores de x e y dados la solución respecto a z de la igualdad (3). Esta solución (que de hecho no es posible expresar de forma explícita, esto es, que no puede calcularse) la representamos por $z = z(x,y)$ y es la función implícita definida por la igualdad (3) (el teorema de la función implícita *que es un teorema de existencia* garantiza que dicha función existe). Ahora derivamos en la igualdad (4) respecto a x para obtener
$$-y\,\mathrm{sen}\big(x\,z(x,y)\big)\left(z(x,y) + x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right) + 3x^2\,\mathrm{e}^{z(x,y)\,y} + x^3 y\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{e}^{z(x,y)\,y} - \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0$$
de donde
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{y\,z(x,y)\,\mathrm{sen}\big(x\,z(x,y)\big) - 3x^2\,\mathrm{e}^{z(x,y)\,y}}{x^3 y\,\mathrm{e}^{z(x,y)\,y} - x\,y\,\mathrm{sen}(x\,z(x,y)) - 1}$$
Naturalmente, esta igualdad tiene sentido siempre que el denominador de la fracción sea distinto de cero. Puedes comprobar que si llamas $f(x,y,z) = y\cos(xz) + x^3\,\mathrm{e}^{zy} - z + 1$ entonces la igualdad anterior es precisamente
$$\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)}$$
calculada en el punto $(x,y,z(x,y))$. Para $(x,y) = (0,0)$ se tiene que $z(0,0)$ viene dado por la ecuación que se obtiene haciendo $x = 0$ e $y = 0$ en la igualdad (3) de donde se deduce que $z(0,0) = 1$. Además
$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,z(0,0)) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = -1 \neq 0$$
Por lo que
$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \frac{0}{-1} = 0$$

44. Calcular las derivadas parciales de primer orden de la función $z = z(x,y)$ definida implícitamente por $yz^4 + x^2z^3 - \mathrm{e}^{xyz} = 0$. Particularizar para el punto $(x,y) = (1,0)$.

45. Calcular las derivadas parciales de primer orden de la función $z = z(x,y)$ definida implícitamente por $z^3 + z\,\mathrm{e}^x + \cos y = 0$.

46. Calcular las derivadas parciales de primer orden de la función $z = z(x,y)$ dada implícitamente por $3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0$, en el punto $(2,1)$ siendo $z(2,1) = 2$.

47. Supongamos que la igualdad

$$\int_{xy}^{y+z} g(t)dt + \int_{3x+y}^{z^2} h(t)dt = 0$$

donde g y h son funciones reales derivables, define a z como función implícita de x, y. Calcular las derivadas parciales de primer orden de $z = z(x, y)$.

48. Supongamos que la igualdad $F(x, y, z) = 0$ determina implícitamente funciones diferenciables $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$. Probar que $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$.

49. Calcular la derivada de la función $y = y(x)$ definida implícitamente por

$$x^y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0$$

Particularizar para $x = 1$ sabiendo que $y(1) = 1$.

50. Calcular la derivada de la función $y = y(x)$ definida implícitamente por

$$y\log(x^2 2 + y^2) - 2xy = 0$$

Particularizar para $x = 0$ sabiendo que $y(0) = 1$.